ECOLE SUPERIEURE DES SCIENCES ET DES TECHNOLOGIES DES INDUSTRIES DU BOIS

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Notations

1.– Soit Ω un espace probabilisé muni de la probabilité P et soit X une variable aléatoire réelle définie sur Ω. On note:

$$(X \leq \alpha) \quad \text{l'évènement} \quad X^{-1}(]-\infty, \alpha])$$
$$(X > \alpha) \quad \text{l'évènement} \quad X^{-1}(]\alpha, +\infty[)$$

2.– Soient B un évènement de probabilité non nulle et A un évènement quelconque. On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Partie I

1.– Déterminer la somme des n premiers entiers:

$$S_n = 1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

Démontrer (éventuellement par récurrence) la formule:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2.– Soit X une variable aléatoire à valeurs entières de 1 à 1000, les 1000 valeurs pouvant être prises chacune avec la probabilité 1/1000.

a) Calculer l'espérance et la variance de la variable X.

b) Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de n variables aléatoires indépendantes de même loi que la variable X. On pose:

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}.$$

Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X}$.

c) On suppose $n = 100$. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, donner un majorant de

$$P\Big(|\overline{X} - 500.5| \geq 75\Big).$$

Donner une estimation plus précise en utilisant la table donnée en annexe.

Partie II

Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes de même loi que la variable aléatoire X définie dans la partie **I.**

1.– Soit α un entier tel que $1 \leq \alpha < 1000$, et soit Y la variable aléatoire définie par

$$Y = \begin{cases} X_2 & \text{si} \quad X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si} \quad X_2 \leq \alpha \end{cases}$$

a) Déterminer les probabilités:

$$P(X_2 \leq \alpha) \qquad P(X_2 > \alpha).$$

b) Soit k un entier tel que $1 \leq k \leq 1000$. Déterminer la probabilité conditionnelle:

$$P_{(X_2 \leq \alpha)}(Y = k).$$

c) Démontrer la relation:

$$(X_2 > \alpha) \cap (Y = k) = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad k \leq \alpha \\ (X_2 = k) & \text{si} \quad k > \alpha \end{cases}$$

En déduire la probabilité conditionnelle:

$$P_{(X_2 > \alpha)}(Y = k).$$

d) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y, son espérance E_α, sa variance en fonction de α.
Pour quelle valeur de α l'espérance E_α est-elle maximale? Calculer son maximum.

2.– Soient α et β deux entiers tels que $1 \leq \alpha < \beta < 1000$ et soit Z la variable aléatoire définie par:

$$Z = \begin{cases} X_3 & \text{si} \quad X_3 > \beta \\ X_2 & \text{si} \quad X_3 \leq \beta \text{ et } X_2 > \alpha \\ X_1 & \text{si} \quad X_3 \leq \beta \text{ et } X_2 \leq \alpha \end{cases}$$

a) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq 1000$, calculer la probabilité conditionnelle

$$P_{(X_3 > \beta)}(Z = k).$$

b) Soit Y la variable aléatoire définie en **II 1.** Démontrer la relation:

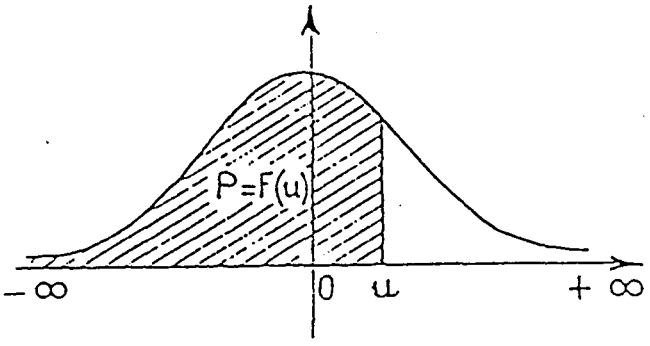
$$P_{(X_3 \leq \beta)}(Z = k) \quad = \quad P(Y = k).$$

c) Déterminer en fonction de α et β la loi de Z et son espérance $E_{\alpha,\beta}$.
d) Pour α fixé, déterminer un majorant M_α de la fonction $\beta \to E_{\alpha,\beta}$.
Déterminer le maximum M des valeurs M_α.

3.– On suppose que $1 \leq \beta \leq \alpha < 1000$. Calculer l'espérance $E_{\alpha,\beta}$ de la variable Z. Comparer avec la valeur M.

FONCTION DE REPARTITION DE LA LOI NORMALE REDUITE

(Probabilité de trouver une valeur inférieure à u)



u	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7791	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de u

u	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
F(u)	0,99865	0,99904	0,99931	0,99952	0,99966	0,99976	0,999841	0,999928	0,999968	0,999997